**VI OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA**
**PRIMER NIVEL**

APELLIDO:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

NOMBRES:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ESCUELA:.....

LOCALIDAD:.....

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

**Problema 1**

Sean $ab$ y $cd$ dos números enteros positivos de dos dígitos distintos de 0, con $a \neq b$ y $c \neq b$ tales que:

$$ab \cdot cd = ba \cdot dc .$$

Por ejemplo, $24 \cdot 84 = 42 \cdot 48 = 2016$.

Hallar todos los pares de números que satisfacen estas condiciones, con $a < b$ y $c > d$.

**Problema 2**

Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ana elige algunos números de *S*; Beto también elige algunos números de *S*. Decimos que Ana y Beto hacen una elección feliz si han elegido exactamente un número en común.

Calcular cuántas elecciones felices pueden hacer Ana y Beto.

ACLARACIÓN: La elección de Ana (y también la de Beto) puede contener uno, dos, tres, cuatro o cinco números.

**Problema 3**

Sea *ABC* un triángulo con $A < B < 90^{\circ} < C$. Consideramos *P* en la recta *AC* con *C* entre *A* y *P*, y *Q* en la recta *AB* con *A* entre *Q* y *B*.

El triángulo *ABC* es tal que la bisectriz del ángulo $BCP$ corta a la recta *AB* en *E*, la bisectriz del ángulo $QAC$ corta a la recta *BC* en *D* y $AD = AC = CE$.

Calcular las medidas de los ángulos del triángulo *ABC*.

**VI OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA**
**SEGUNDO NIVEL**

APELLIDO:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

NOMBRES:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ESCUELA:.....

LOCALIDAD:.....

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

**Problema 1**

Hallar todos los pares de números enteros positivos $(m,n)$ tales que su suma es igual a 2016 y su multiplicación es divisible por 2016.

**Problema 2**

Se tienen 10 cajas con monedas. Los movimientos permitidos son:

- Sacar una moneda de cada una de 9 cajas y ponerlas en la caja de la que no se sacó ninguna moneda.
- Sacar 9 monedas de una de las cajas y poner una en cada una de las otras 9 cajas, exactamente una moneda en cada una.

Al comienzo hay 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 11, 12 y 13 monedas en las 10 cajas.
Determinar si es posible, mediante movimientos permitidos, lograr que todas las cajas tengan distinta cantidad de monedas.
**Nota.** Puede haber una caja sin monedas.

**Problema 3**

Sea *ABC* un triángulo equilátero y sea *D* un punto en el segmento *AB*, con $D \neq A$ y $D \neq B$.
Sea *E* en *AC* tal que *DE* es paralelo a *BC*. Además sean *F* el punto medio de *CD* y *G* el centro del triángulo equilátero *ADE*.
Calcular los ángulos del triángulo *BFG*.

# VI OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA
## TERCER NIVEL

APELLIDO:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

NOMBRES:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ESCUELA:.....

LOCALIDAD:.....

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

**Problema 1**

Sea $A$ un conjunto de seis números enteros consecutivos (puede haber negativos o cero). Demostrar que el conjunto $A$ no se puede partir en dos conjuntos sin elementos en común de modo que la multiplicación de los números de uno de los conjuntos de la partición sea igual a la multiplicación de los números del otro conjunto de la partición.

**Problema 2**

Hallar un número entero $b > 6$ de modo que el número 5654 en base $b$ sea la representación de una potencia de un número primo.

**Problema 3**

Sea $k$ una circunferencia y $P$ un punto exterior a la misma. Las tangentes a la circunferencia trazadas desde $P$ tocan a la circunferencia en $A$ y $B$. Sea $X$ un punto genérico en el menor arco $AB$. Sean $C$ y $D$ los pies de las perpendiculares desde $P$ a las recta $AX$ y $BX$ respectivamente. Demostrar que la recta $CD$ pasa por un punto fijo que no depende de la elección de $X$ en el arco $AB$.